

Esercizi su catene di Markov a tempo discreto (CMTD)

Esercizio CMTD/01 - Sia $\{X_n, n \geq 0\}$ una catena di Markov a tempo discreto con due stati, con matrice delle probabilità di transizione

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

e $P\{X_0 = 0\} = 0.25$.

Calcolare

1. $P\{X_1 = 0 \mid X_0 = 0, X_2 = 0\}$;
2. $f_0^{(n)}$, verificando se lo stato 0 è ricorrente o transitorio;
3. $P\{X_1 \neq X_2\}$.

Esercizio CMTD/02 - Sia data una catena di Markov a tempo discreto con spazio degli stati

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

e matrice delle probabilità di transizione

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

1. Dire quali stati sono ricorrenti e quali transitori.
2. Calcolare la probabilità di raggiungere lo stato j in un numero finito di passi a partire dallo stato i per ogni i e j .

Esercizio CMTD/03 - Si consideri una catena di Markov omogenea il cui diagramma degli stati è mostrato nella figura 1.

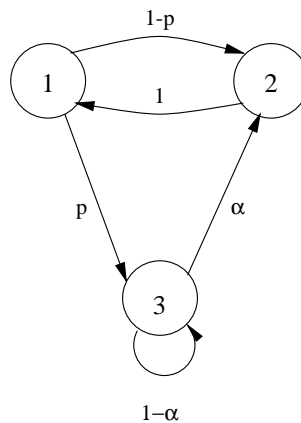


Figura 1.

1. Trovare \mathbf{P} , matrice delle probabilità di transizione.
2. Sotto quali condizioni la catena è irriducibile e aperiodica?
3. Calcolare il vettore delle probabilità limite $\boldsymbol{\pi}$.
4. Qual è il tempo medio di ricorrenza per lo stato 2?

5. Per quali valori di α e p si ha $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$? Sapete dare un'interpretazione al risultato ottenuto?

Esercizio CMTD/04 - Si consideri la catena di Markov a tempo discreto con matrice delle probabilità di transizione

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcolare la distribuzione stazionaria.

Tale distribuzione è una distribuzione di regime?

Esercizio CMTD/05 - Si consideri una catena di Markov a tempo discreto con spazio degli stati

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

e matrice delle probabilità di transizione

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Dimostrare che la catena è irriducibile.
2. Trovarne il periodo.
3. Trovare la distribuzione stazionaria.

Esercizio CMTD/06 - Si considerino delle variabili casuali binarie X_n indipendenti e identicamente distribuite, che possono assumere i valori ± 1 con probabilità $P\{X_n = +1\} = 0.6$ e $P\{X_n = -1\} = 0.4$.

Mostrare che la sequenza casuale

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

con $n \geq 0$ e $Y_0 = 0$, è una catena di Markov. Calcolare le probabilità di transizione $p_{ij}^{(m)}$ e le probabilità degli stati $\pi_i(n)$. Se possibile, calcolare anche la distribuzione di regime.

Esercizio CMTD/07 - E' data una catena di Markov a tempo discreto $\{X_n, n \geq 0\}$, che può assumere solo i valori 0 e 1. Sia \mathbf{P} la matrice delle probabilità di transizione

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Calcolare

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n$;
2. $\pi(1)$ e $\pi(2)$, sapendo che $X_0 = 0$.

Esercizio CMTD/08 - Mostrare che il tempo medio di ricorrenza M_j dello stato j di una catena di Markov a tempo discreto è uguale all'inverso della probabilità a regime di trovare la catena nello stato j . Mostrare inoltre che il numero medio v_{ij} di visite allo stato i tra due visite consecutive allo stato j è pari al rapporto tra le probabilità a regime di trovare la catena nello stato i e nello stato j .

Esercizio CMTD/09 - Mostrare che il vettore delle probabilità di regime di trovare una catena di Markov a tempo discreto nei vari stati ha tutte componenti uguali quando la matrice \mathbf{P} delle probabilità di transizione in un passo è doppiamente stocastica (cioè sia le righe sia le colonne sommano a 1).

Esercizio CMTD/10 - E' data una catena di Markov a tempo discreto $\{X_n, n \geq 0\}$, con matrice delle probabilità di transizione

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Al passo $n = 0$ la catena si trova nello stato 0.

1. Si discuta l'ergodicità della catena.
2. Si ricavi il vettore $\boldsymbol{\pi}(n)$ delle probabilità degli stati dipendenti dal tempo, per $n = 0, 1, 2, 3, 4$.
3. Si calcoli la distribuzione stazionaria, confrontandola con il risultato ottenuto al punto 2.

Esercizio CMTD/11 - Si consideri una sorgente di traffico di tipo *on/off*, che genera informazione per una rete di telecomunicazioni che lavora a intervalli di tempo di lunghezza fissa, detti *slot*. Il traffico è generato in pacchetti di dimensione costante, tale per cui il tempo di generazione e di trasmissione di un pacchetto sia pari a uno slot. La sorgente di tipo *on/off* alterna periodi in cui è silente e non genera alcun pacchetto a periodi genera pacchetti. In quest'ultimo caso viene generato un pacchetto in ogni slot. Il comportamento della sorgente può allora essere descritto tramite due stati:

- *stato 0*: non genera pacchetti;
- *stato 1*: genera un pacchetto per slot.

Si suppone che le durate (in numero di slot) degli intervalli di permanenza nei due stati siano prive di memoria, ossia che esse possano essere descritte come variabili casuale con distribuzione geometrica.

Si costruisca una catena di Markov a tempo discreto che modelli il comportamento di una sorgente *on/off* che genera un traffico normalizzato medio pari a 0.25 (è attiva in media 1/4 del tempo) e per la quale l'intervallo di permanenza nello stato 1 (di *on*) duri in media 10 slot.