

Esercizi su code in isolamento

Esercizio CODE/01 - Si consideri un sistema a coda con arrivi alla Poisson, con tempi di servizio indipendenti e distribuiti esponenzialmente con parametro μ , e con m servitori indipendenti e identici tra di loro. Al tempo $t = 0$ il cliente A richiede servizio e trova gli m servitori occupati e altri n clienti già in attesa di servizio. Tutti i clienti aspettano quanto necessario per ottenere il servizio richiesto; essi vengono serviti in ordine di arrivo, e non si accettano nuove richieste di servizio dopo il tempo $t = 0$.

1. Trovare il tempo medio passato da A in attesa di ricevere il servizio.
2. Trovare il valor medio dell'istante di tempo al quale il sistema si svuota (cioè l'istante in cui tutti i clienti terminano il loro servizio).
3. Sia X l'ordinalità del completamento del servizio da parte di A (cioè $X = k$ se A è il k -esimo cliente a terminare il servizio dopo il tempo $t = 0$). Trovare $P\{X = k\}$, per $k = 1, 2, \dots, m + n + 1$.
4. Trovare la probabilità che il cliente A completi il servizio prima del cliente immediatamente davanti a lui nella coda di attesa.
5. Sia \tilde{w} la quantità di tempo passata da A in attesa di ricevere il servizio. Trovare $P\{\tilde{w} > x\}$.

Esercizio CODE/02 - Si consideri un sistema a coda con un solo servitore nel quale i tempi di servizio sono esponenzialmente distribuiti con parametro μ . I tempi di interarrivo sono pure esponenzialmente distribuiti; la velocità di arrivo è pari a 2λ quando il sistema (coda + servizio) è vuoto, mentre è pari a λ altrimenti.

La capacità della fila di attesa è supposta infinita.

1. Si disegni il diagramma delle velocità di transizione della catena di Markov a tempo continuo che modella questo sistema a coda.
2. Si discuta l'ergodicità della catena di Markov e si calcoli la distribuzione di regime.
3. Si calcolino il numero medio di clienti nel sistema, il tempo medio trascorso nel sistema da un cliente ed il tempo medio di attesa di un cliente prima di iniziare il servizio.

Esercizio CODE/03 - Si consideri un sistema a coda con un solo servitore in cui i tempi di servizio sono esponenzialmente distribuiti con parametro μ .

I tempi tra gli arrivi dei clienti sono pure esponenzialmente distribuiti; la velocità di arrivo quando nel sistema ci sono k clienti vale:

$$\lambda_k = \frac{\lambda}{k+1} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

La capacità della fila di attesa è supposta infinita.

1. Si discuta l'ergodicità della catena di Markov a tempo continuo che modella questo sistema a coda, e si calcoli la distribuzione di regime.
2. Si calcolino il numero medio di clienti nel sistema ed il tempo medio che un cliente trascorre nel sistema.

Esercizio CODE/04 - Si consideri una coda M/M/1 con parametri λ e μ in cui i clienti sono impazienti. Quando un cliente arriva, stima il suo tempo di attesa w e decide di restare in coda con probabilità e^{-aw} e di andare via con probabilità $1 - e^{-aw}$.

La stima di w è pari a k/μ quando il cliente arrivando trova k clienti nel sistema.

Trovare le condizioni di ergodicità e la distribuzione di regime.

Esercizio CODE/05 - Si consideri una coda M/M/1 con parametri λ e μ in cui i clienti arrivano a coppie (ogni arrivo corrisponde a una coppia di clienti).

Si disegni il diagramma delle velocità di transizione e si scrivano le equazioni di bilanciamento dei flussi.

Esercizio CODE/06 - Si consideri il sistema con due code mostrato nella figura 1.

- Gli arrivi seguono un processo di Poisson con velocità λ . I clienti arrivando scelgono la coda più corta, ed a pari lunghezza scelgono a caso una delle due code con ugual probabilità.

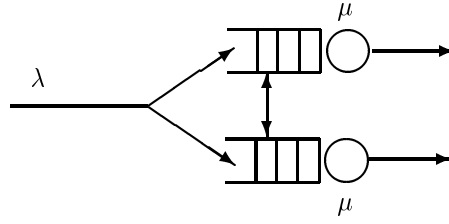


Figura 1.

- I tempi di servizio ad entrambe le code sono esponenzialmente distribuiti con media $1/\mu$.
 - Alla partenza di un cliente che ha terminato il suo servizio, i clienti si spostano da una coda all'altra se così facendo riescono a migliorare la loro posizione. Lo spostamento avviene contemporaneamente alla partenza ed istantaneamente. I clienti che si spostano vanno a mettersi in fondo alla nuova coda.
 - La capacità totale del sistema è di 6 clienti, inclusi i due in servizio.
1. Identificando lo stato del sistema con la coppia (n_1, n_2) , dove n_i è il numero di clienti alla coda i , si disegni il diagramma delle velocità di transizione della catena di Markov a tempo continuo che modella il funzionamento del sistema.
 2. Identificando poi lo stato del sistema con il numero totale di clienti in esso contenuti, si verifichi che l'evoluzione dello stato nel tempo gode ancora della proprietà markoviana e si disegni il diagramma delle velocità di transizione della nuova catena di Markov a tempo continuo.
 3. Si commenti il risultato trovato, discutendone la somiglianza con i risultati noti per i sistemi a coda singola.
 4. Si calcoli il numero medio di clienti nel sistema a regime, e si ricavi (senza svolgere tutti i calcoli) il numero medio di clienti nella coda 1 a regime.
 5. Si calcoli il tempo medio trascorso nella coda da un cliente a regime.

Esercizio CODE/07 - Si consideri una coda a infiniti servitori alla quale arrivano clienti con velocità che dipende dallo stato del sistema, ovvero dal numero di clienti già presenti nella coda.

Sia λ_k il parametro della distribuzione esponenziale unilatera che descrive l'intervallo di tempo tra l'istante in cui si entra nello stato k e l'istante in cui se ne esce per un arrivo (se non si è prima cambiato stato per una partenza):

$$\lambda_k = (k + 2)\lambda \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Il tempo necessario per servire ogni cliente è una variabile casuale indipendente con densità di probabilità esponenziale unilatera a valor medio $1/\mu$.

1. Trovare le condizione di esistenza di una distribuzione di regime.
2. Calcolare la probabilità a regime di avere k clienti nel sistema.
3. Calcolare il numero medio di clienti nel sistema a regime.
4. Calcolare il tempo medio trascorso nel sistema da un cliente a regime.

Esercizio CODE/08 - Si considerino le code $M/E_2/1/0$ e $M/H_2/1/0$ in cui non si ha la possibilità di formare una fila di attesa.

1. Si costruisca il modello markoviano dei due sistemi e si discuta la sua ergodicità.
2. Si calcolino le probabilità a regime di avere il servitore libero e occupato.

Esercizio CODE/9 - Si consideri una stazione di servizio taxi il cui parcheggio è costituito da soli 5 posti. I taxi arrivano alla stazione secondo un processo di Poisson con tasso $\mu = 2$ taxi/min. Il processo degli arrivi dei clienti alla stazione è ancora di Poisson con tasso $\lambda = 1$ clienti/min. Un taxi che arriva alla stazione porta via un cliente, oppure occupa un posto del parcheggio se non ci sono clienti in attesa. Un taxi che arriva e trova i 5 posti del parcheggio già occupati, va via.

1. Modellare il sistema con una catena di Markov di nascita e morte a tempo continuo, definendo un'opportuna variabile di stato.
2. Trovare la probabilità di avere n clienti in attesa.
3. Calcolare il numero medio di clienti in attesa.

Esercizio CODE/10 - Si consideri uno studio dentistico in cui la sala di attesa sia suddivisa in due parti: la prima contiene B posti a sedere (compreso quello occupato dal cliente in servizio), la seconda è uno spazio capace di alloggiare un numero infinito di persone in piedi. Assumendo che il processo degli arrivi sia di Poisson con tasso λ e che il tempo di servizio sia distribuito esponenzialmente con parametro μ , calcolare:

1. il numero medio di clienti seduti ed il numero medio di clienti in piedi;
2. il tempo medio trascorso da ciascun cliente in piedi e seduto.

Esercizio CODE/11 - Si consideri una coda M/M/1 nella quale i tempi di servizio sono esponenzialmente distribuiti con parametro μ e i clienti arrivano dal mondo esterno secondo un processo di Poisson a velocità λ . Contrariamente al caso solito, il servitore ogni volta che termina un servizio, si prende un periodo di riposo nel quale non vengono serviti clienti eventualmente in attesa. I tempi di riposo sono esponenzialmente distribuiti con parametro α . Al termine del periodo di riposo il servitore diventa di nuovo disponibile per il servizio di clienti (se ce ne sono in attesa, altrimenti aspetta l'arrivo del primo cliente e lo serve subito).

1. Disegnare il diagramma delle velocità di transizione di una catena di Markov a tempo continuo che modella il comportamento del sistema.
2. Ripetere il punto 1. nel caso di popolazione finita pari a 5.
3. Ripetere il punto 2. con l'ipotesi aggiuntiva di fila di attesa con capacità pari a 1.
4. Nel caso illustrato al punto 3. e $\alpha = \lambda = \mu$, calcolare la distribuzione di regime, il numero medio di clienti nel sistema, nel solo servitore e in fila di attesa, e il tempo medio trascorso da un cliente nella fila di attesa.

Esercizio CODE/12 - Si consideri una coda M/M/1 nella quale il servitore viene disattivato nel momento in cui non ci sono più clienti da servire. La riattivazione del servitore viene effettuata quando nella coda si trovano k clienti in attesa di servizio. Si suppongano trascurabili i tempi di attivazione e disattivazione. Ovviamente il caso $k = 1$ corrisponde al funzionamento normale della M/M/1.

Siano λ e μ i parametri delle distribuzioni di probabilità esponenziali associate rispettivamente ai tempi tra due arrivi e ai tempi di servizio.

1. Nel caso $k = 2$, disegnare il diagramma delle velocità di transizione della CMTC che modella il sistema.
2. Discutere l'ergodicità della CMTC.
3. Calcolare il tempo medio trascorso in attesa dai clienti, il numero medio dei clienti nel sistema e il fattore di utilizzazione.

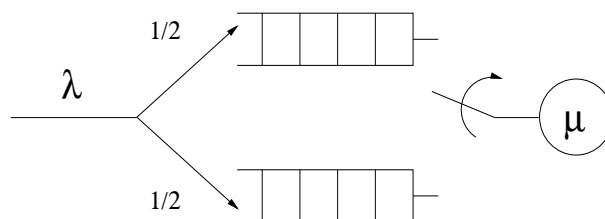


Figura 2.

Esercizio CODE/13 - Si consideri il sistema a coda rappresentato nella figura 2. Esso comprende due file di attesa ed un servitore. Il massimo numero di clienti che si possono contemporaneamente avere nel sistema è pari a k . Gli arrivi dal mondo esterno seguono un processo di Poisson a velocità λ . I clienti che arrivano quando nelle code o in servizio ci sono già k clienti, sono scartati. Ogni cliente che arriva sceglie di andare ad una delle due code con uguale probabilità. Il tempo di servizio è esponenzialmente distribuito con parametro μ . Il servitore passa continuamente da una coda all'altra. Se la coda a cui il servitore arriva non è vuota, il primo cliente viene servito e poi passa all'altra. Se la coda a cui il servitore arriva è vuota, si passa immediatamente all'altra. Il tempo necessario per passare da una coda all'altra è trascurabile.

1. Nel caso $k = 2$, si disegni il diagramma delle velocità di transizione della catena di Markov a tempo continuo che modella il sistema.
2. Si discuta l'ergodicità della catena.
3. Si calcoli la distribuzione di regime e il numero medio dei clienti nel sistema, nel servitore e nelle due file di attesa. Si calcoli inoltre il tempo medio trascorso dai clienti nella prima fila di attesa.

Esercizio CODE/14 - Si consideri un sistema a coda con un solo servitore in grado di servire μ clienti al secondo e con una fila di attesa FIFO con capacità limitata: non ci possono essere più di 3 clienti nel sistema a coda, includendo quello in servizio.

Gli arrivi dei clienti avvengono a gruppi e i tempi tra gli arrivi sono distribuiti in modo esponenziale. Un gruppo di clienti entra nella fila di attesa solo se tutti i clienti trovano posto, altrimenti sono tutti persi. Il tempo di servizio è distribuito secondo un'esponenziale negativa.

Calcolare il ritardo medio dei clienti che attraversano il sistema a coda e il numero medio di clienti che vengono serviti nell'unità di tempo, considerando le seguenti distribuzioni per la dimensione dei gruppi dei clienti e la velocità di arrivo:

1. gruppi di un solo cliente con velocità 2λ ;
2. gruppi di due clienti con velocità di arrivo dei gruppi pari a λ ;
3. gruppi di 1, 2 o 3 clienti con uguale probabilità e con velocità di arrivo dei gruppi pari a λ .

Commentare i risultati ottenuti nel caso particolare di $\lambda = \mu/2$.

Esercizio CODE/15 - Si consideri un sistema a coda di tipo M/M/1 con fila di attesa illimitata e popolazione finita pari a 3, in cui gli arrivi avvengono in gruppi ed i servizi (individuali) hanno media μ^{-1} . Quando i clienti sono in coda (fila di attesa o servizio), la distribuzione del tempo prima dell'arrivo del prossimo gruppo ha densità di probabilità esponenziale con parametro $(3-i)\lambda$ e la probabilità che un gruppo contenga j clienti vale $\frac{1}{3-i}$ per $j = 1, 2, \dots, (3-i)$.

Si discutano le condizioni per l'esistenza della distribuzione di regime del numero di clienti nel sistema e sotto tali condizioni la si calcoli. Si calcoli inoltre il numero medio di clienti serviti per unità di tempo, il numero medio di gruppi arrivati per unità di tempo e la dimensione media dei gruppi di clienti che arrivano alla coda.

Esercizio CODE/16 - Si consideri un sistema a coda M/M/1 con servizi a gruppi. Il servitore può servire 1, 2 o 3 clienti a seconda del numero di clienti che sono in fila di attesa quando il servitore inizia un nuovo servizio e in modo che il gruppo che entra in servizio sia il più numeroso possibile. Il tempo di servizio di un gruppo dura in media $1/\mu$ indipendentemente dalla dimensione del gruppo. Il processo degli arrivi dei clienti alla coda è di Poisson con tasso λ .

Disegnare la catena di Markov a tempo continuo che modella il sistema e scrivere le equazioni di flusso del sistema.

Esercizio CODE/17 - Si consideri un sistema a coda $E_2/M/1/2$ con arrivi a gruppo di 3 clienti. Se i clienti di un gruppo non trovano tutti posto nel sistema, si accettano solo quelli che trovano posto. Il tempo medio di interarrivo tra gruppi è pari a λ^{-1} , mentre il tempo medio di servizio è pari a μ^{-1} .

1. Si disegni il diagramma delle velocità di transizione della catena di Markov a tempo continuo che modella il sistema.
2. Discutere l'ergodicità della catena.
3. Ricavare la distribuzione di regime.

Esercizio CODE/18 - Si consideri una coda M/M/1/1 dove i clienti arrivano secondo un processo di Poisson a velocità 2λ e vengono serviti per tempi aventi densità di probabilità esponenziale negativa con parametro μ . I clienti che al loro arrivo non trovano posto nella coda vengono persi. I clienti hanno priorità diversa: con probabilità 0.5 un cliente che arriva ha priorità bassa e con probabilità 0.5 ha priorità alta. I clienti a priorità alta vengono serviti prima di quelli a priorità bassa; se all'arrivo di un cliente a priorità alta un cliente di priorità bassa si trova in servizio, il servizio del cliente a priorità bassa viene interrotto ed inizia il servizio del cliente ad alta priorità. Solo quando il servizio del cliente ad alta priorità finisce, inizia il servizio del cliente a bassa priorità. Si noti che l'arrivo di un cliente ad alta priorità è perso se nel sistema a coda ci sono già 2 clienti, qualunque sia la loro priorità.

- Si costruisca il modello markoviano dettagliato del sistema e se ne discuta l'ergodicità.
- Si aggregino gli stati del modello markoviano dettagliato e si ricavi un modello che tenga in conto solo il numero totale di clienti nella coda.
- Si calcoli la distribuzione di probabilità di regime del numero totale di clienti e la si confronti con quella risultante da un sistema con disciplina di coda FIFO (senza priorità).
- Si calcoli la distribuzione di regime del numero di clienti a bassa e alta priorità.
- Si calcoli il valor medio del numero totale di clienti nella coda, del numero di clienti a bassa priorità e del numero di clienti ad alta priorità.
- Si calcoli il tempo medio trascorso nella coda sia da un cliente a bassa priorità, sia da un cliente ad alta priorità, e il tempo medio globale.

Esercizio CODE/19 - Si consideri una coda di tipo $M/E_2/2/1$ con arrivi a gruppi, in cui gli arrivi dei gruppi si succedono secondo un processo di Poisson a velocità λ ed i tempi di servizio dei clienti hanno durata media $1/\mu$. Ogni arrivo comporta l'ingresso nella coda di un gruppo di 2 clienti. Se non è possibile accogliere nella coda entrambi i clienti si accetta il primo ed il secondo viene perso. Se la fila di attesa è piena si perdono entrambi i clienti del gruppo.

Si discutano le condizioni per l'esistenza di una distribuzione di regime del numero di clienti nel sistema e sotto tali condizioni si calcoli tale distribuzione, il numero medio dei clienti e il tempo medio trascorso da un cliente nel sistema.

Esercizio CODE/20 - Si consideri una coda di tipo $M/M/2/2$ con arrivi a gruppi e servizi individuali. Gli arrivi dei gruppi di clienti si susseguono secondo un processo di Poisson con velocità λ ; ogni gruppo può comprendere 1, 2, o 3 clienti con uguale probabilità. I servizi hanno velocità μ . Quando all'arrivo di un gruppo non tutti i clienti trovano posto nella fila di attesa, si accettano tutti quei clienti che possono trovare posto, mentre si perdono gli altri.

- Si identifichi una definizione di stato che permetta la costruzione di un modello markoviano della coda.
- Si disegni il diagramma delle velocità di transizione della catena di Markov a tempo continuo che modella la coda e si scriva la matrice delle velocità di transizione della catena.
- Si discuta l'ergodicità del modello markoviano della coda e si calcoli il numero medio di clienti serviti per unità di tempo, il numero medio di clienti nella coda e il tempo medio trascorso da un cliente nella coda.
- Si calcoli il tempo medio di attesa del primo cliente servito in un gruppo.
- Si calcoli la probabilità di perdita di un cliente.
- Si calcoli la distribuzione di regime.

Esercizio CODE/21 - Si consideri una coda in tempo discreto di tipo $Geom/D/1/2$ con capacità totale finita pari a 3 e arrivi a gruppi. I tempi di interarrivo tra i gruppi hanno una densità di probabilità geometrica, tale per cui in ogni slot (intervallo di tempo di durata unitaria) la probabilità di arrivo di un gruppo è pari a p . Ogni gruppo può comprendere 1 o 2 clienti con uguale probabilità. Se all'arrivo di un gruppo non tutti i suoi clienti possono essere accettati, tutto il gruppo viene perso. I tempi di servizio hanno durata costante pari ad 1 (cioè un servizio dura esattamente quanto uno slot).

Si spieghi il motivo per cui è possibile dare una descrizione del sistema mediante una catena di Markov a tempo discreto e la si costruisca; se ne discuta l'ergodicità e si calcoli:

- la distribuzione di regime;
- il valore medio del numero di clienti nel sistema.

Esercizio CODE/22 - Si consideri un sistema a coda $M/D/1/0$ in cui i tempi di interarrivo hanno una densità di probabilità esponenziale con parametro λ e i servizi hanno durata costante pari a μ^{-1} .

- Si costruisca un modello semi-markoviano del sistema e se ne discuta l'ergodicità;
- si calcoli il numero medio di clienti nel sistema e la probabilità che un arrivo venga rifiutato.

Si confrontino i risultati trovati con quelli che si ottengono nel caso di tempi di servizio con densità di probabilità esponenziale negativa e si commenti il risultato.

Esercizio CODE/23 - Si consideri una coda in tempo discreto di tipo Geom/D/1 in cui i tempi di interarrivo hanno una densità di probabilità geometrica, tale per cui in ogni slot di durata unitaria la probabilità di un arrivo è pari a p e dove i tempi di servizio hanno durata costante pari ad 1 (cioè un servizio dura esattamente quanto uno slot).

Si spieghi il motivo per cui è possibile dare una descrizione del sistema mediante una catena di Markov a tempo discreto e la si costruisca; se ne discuta l'ergodicità e si calcoli:

- la distribuzione di regime,
- il valore medio del numero di clienti nella coda,
- il ritardo medio dei clienti nel sistema,
- il ritardo medio dei clienti nella fila di attesa.