

Esercizi su reti di code

Esercizio RC/01 - Si consideri una rete di code chiusa che comprende tre code a singolo servitore con tempi di servizio distribuiti secondo una densità di probabilità esponenziale unilatera. I tempi medi di servizio alle tre code siano $1/\mu_1$, $1/\mu_2$ e $1/\mu_3$ rispettivamente.

Nella rete circolano tre clienti.

Le probabilità r_{ij} che un cliente vada dalla coda i alla coda j sono

$$[r_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.0 \end{bmatrix}$$

1. Disegnare il diagramma delle velocità di transizione della catena di Markov a tempo continuo che modella questo sistema, e discuterne l'ergodicità.
2. Calcolare le probabilità a regime di avere k_i clienti nella coda i .
3. Nel caso $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, calcolare il numero medio di clienti nella coda i a regime, e il tempo medio trascorso nella coda i da un cliente a regime (per $i = 1, 2, 3$).

Esercizio RC/02 - Si consideri la rete di code mostrata nella figura 1, comprendente due code con servizi esponenziali a velocità μ_1 e μ_2 rispettivamente.

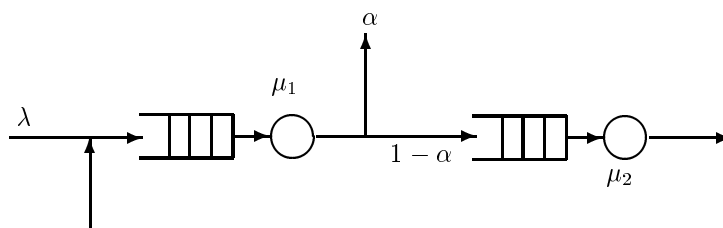


Figura 1.

Gli arrivi alla rete seguono un processo di Poisson con velocità λ e le probabilità r_{ij} di andare alla coda j lasciando la coda i sono

$$[r_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 - \alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Discutere l'ergodicità del sistema.
2. Calcolare la probabilità a regime di avere k_1 clienti nella prima coda e k_2 clienti nella seconda.

Esercizio RC/03 - Si consideri la rete di code mostrata nella figura 2. I tempi di servizio alle due code sono esponenzialmente distribuiti con parametri μ_1 e μ_2 , rispettivamente. I clienti arrivano alla rete dal mondo esterno secondo un processo di Poisson a velocità λ . Le probabilità r_{ij} che lasciando la coda i si vada alla coda j sono:

$$r_{11} = 0 \quad r_{12} = \alpha \quad r_{21} = \beta \quad r_{22} = 1 - \beta$$

1. Disegnare il diagramma delle velocità di transizione della catena di Markov a tempo continuo che modella questo sistema e discuterne l'ergodicità.
2. Calcolare la probabilità a regime di avere k_1 clienti nella prima coda e k_2 clienti nella seconda coda.
3. Calcolare il numero medio di clienti e il tempo medio trascorso alla prima coda in condizioni di regime.

Esercizio RC/04 - Si consideri la rete ciclica di code mostrata nella figura 3, nella quale circolano M clienti.

Entrambi i servizi sono esponenziali a velocità μ_1 e μ_2 rispettivamente.

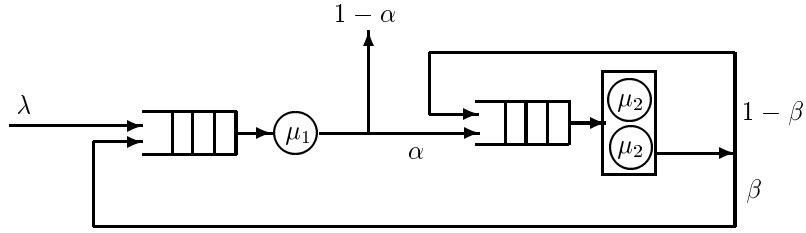


Figura 2.

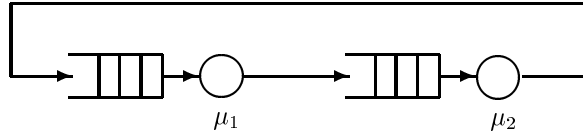


Figura 3.

1. Si costruisca il modello markoviano del sistema e si discuta la sua ergodicità.
2. Si calcolino le probabilità di regime.
3. Si confronti il risultato ottenuto con quello di una rete M/M/1/N/∞.

Esercizio RC/05 - Si consideri la rete di code mostrata nella figura 4.

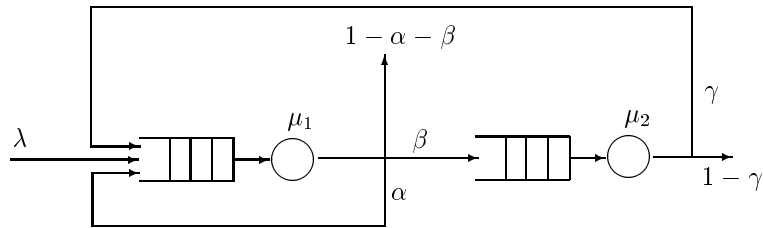


Figura 4.

Tale rete comprende due code a server singolo con servizi esponenziali a velocità μ_1 e μ_2 rispettivamente. Gli arrivi alla rete dall'esterno seguono un processo di Poisson a velocità λ e le probabilità r_{ij} di andare alla coda j lasciando la coda i sono

$$[r_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

1. Disegnare il diagramma delle velocità di transizione della catena di Markov a tempo continuo che modella questo sistema, e discuterne l'ergodicità.
2. Calcolare le probabilità a regime di avere k_1 clienti nella prima coda e k_2 clienti nella seconda.

Esercizio RC/06 - Si consideri una rete di code aperta mostrata nella figura 5, nella quale gli arrivi dall'esterno seguono dei processi di Poisson tutti con velocità λ , come indicato, e tutte le code hanno un solo server. Si supponga che in tutte le code i tempi di servizio siano esponenzialmente distribuiti con parametro μ .

1. Si discuta l'ergodicità della rete.
2. Si calcoli la distribuzione a regime dei clienti nella rete.

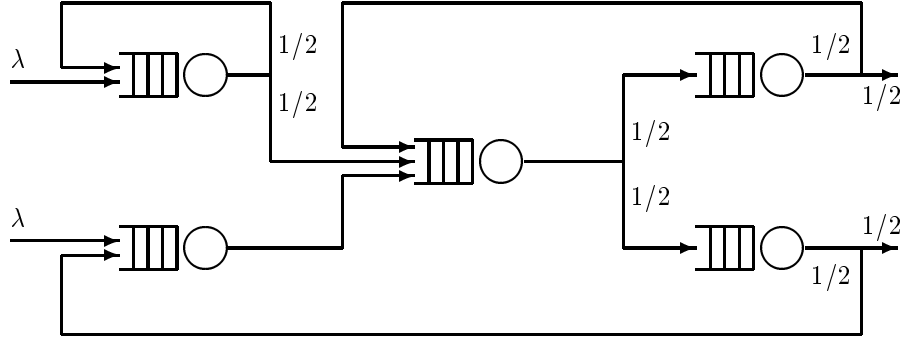


Figura 5.

3. Si calcoli il tempo medio che un cliente trascorre a regime nella rete.

Esercizio RC/07 - Si consideri una rete di code chiusa composta da N code, numerate da 0 a $N - 1$, disposte in un ciclo, quindi con probabilità p_{ij} che un cliente alla fine del servizio alla coda i vada alla coda j pari a

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & j = |i + 1|_N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $|x|_y$ indica il resto della divisione di x per y . Si supponga che tutte le code abbiano un solo servitore e che in tutte le code i tempi di servizio siano esponenzialmente distribuiti con parametro μ . Nella rete sono presenti M clienti.

1. Si calcoli la distribuzione a regime dei clienti nelle code.
2. Si calcoli il tempo medio che un cliente impiega a ciclare nella rete a regime.

Esercizio RC/08 - Si consideri una rete di code chiusa comprendente due code in cui circolano tre clienti. Le due code hanno un solo servitore ed i tempi di servizio sono sempre esponenzialmente distribuiti con parametro μ . Alla fine del servizio ad una coda, un cliente si dirige all'altra se questa è vuota, altrimenti il cliente sceglie con uguale probabilità tra le due code.

1. Si discuta l'ergodicità del modello Markoviano della rete di code.
2. Si calcoli la distribuzione di regime.
3. Si verifichi se la distribuzione di regime coincide con quella che si otterrebbe dal risultato di Gordon e Newell.

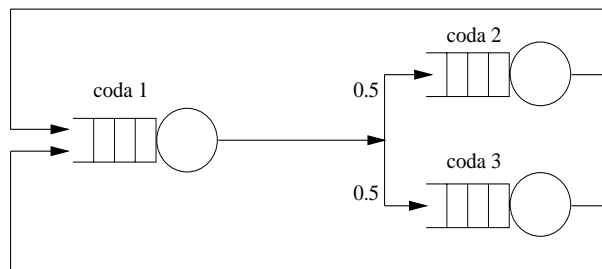


Figura 6.

Esercizio RC/09 - Si consideri la rete di code chiusa disegnata nella figura 6 in cui circolano K clienti. I tempi di servizio alle diverse code hanno densità di probabilità esponenziale con parametro μ .

1. Si calcoli la distribuzione a regime dei clienti nella rete per $K = 1$ e $K = 2$.

2. Si verifichi nel caso $K = 2$ che il tempo di attraversamento della coda 2 può essere ottenuto sia mediante il risultato di Little, sia usando come probabilità di trovare k_2 clienti all'arrivo la probabilità di regime di avere k_2 clienti alla coda in una rete in cui circolano $K = 1$ clienti.
3. Si calcoli il valor medio del tempo tra due partenze consecutive dalla coda 1 nel caso $K = 2$.

Esercizio RC/10 - Si consideri una rete di code aperta comprendente K code $M/D/1$ in serie. Gli arrivi dei clienti alla coda 1 seguono un processo di Poisson a velocità λ . I tempi di servizio a tutte le code sono identicamente uguali a 1.

1. Si discuta l'esistenza di una distribuzione di regime.
2. Si calcoli il numero medio di clienti nella rete a regime.
3. Si calcoli il valor medio del tempo impiegato da un cliente ad attraversare la rete.

Esercizio RC/11 - Si consideri una rete di code aperta comprendente K code $M/M/\infty$ in serie. Gli arrivi dei clienti alla coda 1 seguono un processo di Poisson a velocità λ . I tempi di servizio alla coda i hanno densità di probabilità esponenziale negativa con parametro μ_i .

1. Si calcoli la distribuzione a regime dei clienti nella rete.
2. Si calcoli il numero medio di clienti nella rete a regime.
3. Si calcoli il valor medio del tempo impiegato da un cliente ad attraversare la rete.

Esercizio RC/12 - Si consideri una rete di code chiusa comprendente due code in serie, dove circolano tre clienti. La prima coda ha un solo servitore con tempi di servizio che hanno densità di probabilità esponenziale con parametro 2μ . La seconda coda ha due servitori con tempi di servizio che hanno densità di probabilità esponenziale negativa con parametro μ .

1. Si costruisca un modello Markoviano della rete di code e si discuta l'esistenza di una distribuzione di regime.
2. Si calcoli la distribuzione di regime.
3. Si calcoli il numero medio di clienti a regime alla coda con servitore singolo.
4. Si calcoli il tempo medio trascorso a regime da ogni cliente nella coda con servitore singolo.
5. Supponendo che i servizi alla seconda coda procedano solo quando entrambi i servitori sono simultaneamente impegnati, verificare se la rete di code ammette ancora soluzione sotto forma di prodotto.

Esercizio RC/13 - Si consideri una rete di code chiusa comprendente tre code disposte in serie, dove circolano due clienti. Le prime due code hanno un solo servitore con tempi di servizio che hanno densità di probabilità esponenziale negativa con parametro μ . La terza coda ha due servitori che possono lavorare in parallelo ed il tempo di servizio richiesto da ogni cliente ha densità di probabilità esponenziale negativa con parametro μ . Inoltre le prime due code non hanno fila di attesa: quando il servitore è occupato, un cliente che arriva non può fermarsi alla coda e deve procedere immediatamente alla coda successiva.

1. Si discuta l'esistenza di una distribuzione di regime.
2. Si calcoli la distribuzione a regime dei clienti nelle code.
3. Si calcoli il numero medio di clienti alle tre code.
4. Si calcoli il tempo medio trascorso a regime da ogni cliente alle tre code.

Esercizio RC/14 - Si consideri una rete di code aperta comprendente tre code disposte in serie. Gli arrivi di clienti dall'esterno avvengono soltanto alla prima coda e seguono un processo di Poisson con velocità λ . La prima coda ha un solo servitore con tempi di servizio che hanno densità di probabilità esponenziale negativa con parametro μ . I clienti che lasciano la prima coda si presentano alla seconda coda. La seconda coda ha infiniti servitori e il tempo di servizio richiesto da ogni cliente ha densità di probabilità esponenziale con parametro 2μ . I clienti che lasciano la seconda coda si ripresentano alla seconda coda con probabilità $1/2$ e vanno alla terza coda con probabilità $1/2$. La terza coda ha un solo servitore con tempi di servizio che hanno densità di probabilità esponenziale negativa con parametro μ . I clienti che lasciano la terza coda abbandonano la rete.

1. Si discuta l'esistenza di una distribuzione di regime.

2. Si calcoli la distribuzione a regime dei clienti nelle code.
3. Si calcoli il numero medio di clienti alle tre code.
4. Si calcoli il tempo medio trascorso da ogni cliente nella rete, sia utilizzando il risultato di Little, sia sommando opportunamente i tempi medi trascorsi alle singole code.