

Esercizi su catene di Markov a tempo continuo (CMTC)

Esercizio CMTC/01 - Trovare la densità di probabilità della più piccola tra K variabili casuali indipendenti, tutte distribuite secondo una densità di probabilità esponenziale unilatera con parametro λ .

Esercizio CMTC/02 - Dimostrare che la sovrapposizione di N processi di Poisson indipendenti con parametri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ è un processo di Poisson con parametro $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N$.

Esercizio CMTC/03 - Si consideri un processo di nascita e morte con spazio degli stati $S=\{0,1\}$. Le uniche transizioni possibili sono quelle da 0 ad 1 e viceversa, quindi

$$q_{01} = \lambda_0 = \lambda \quad q_{10} = \mu_1 = \mu$$

Calcolare

1. le probabilità di transizione $p_{ij}(t)$
2. le probabilità di stato al tempo t , $\pi_k(t)$, $k = 0,1$, esprimendo il risultato in termini di $\pi_0(0)$ e $\pi_1(0)$
3. la distribuzione di regime

Esercizio CMTC/04 - Un barbiere apre il suo negozio al tempo $t = 0$. I clienti arrivano casualmente secondo un processo di Poisson, cioè la densità di probabilità del tempo tra due arrivi è

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda t} u(t)$$

Ogni taglio di capelli richiede X secondi, dove X è una opportuna variabile casuale.

Trovare la probabilità P che il secondo cliente che arriva non debba aspettare, ed anche W , suo tempo medio d'attesa, nei casi seguenti:

1. $X = c = \text{costante}$
2. X è uniformemente distribuita tra 0 e $2c$
3. X è distribuita esponenzialmente con densità di probabilità

$$b(x) = \frac{1}{c} e^{-x/c}$$

Esercizio CMTC/05 - Dei passeggeri arrivano in modo casuale ad una fermata dell'autobus. Il processo stocastico che descrive gli arrivi dei passeggeri alla fermata è di tipo Poisson con velocità $\lambda = 1$ arrivo al minuto. Anche le partenze degli autobus avvengono secondo un processo di Poisson, indipendente dal processo degli arrivi dei passeggeri, con velocità media $\mu = 2$ autobus all'ora.

Supponendo che i passeggeri salgano sempre sul primo autobus che passa (quindi che gli autobus siano in grado di trasportare un numero arbitrario di passeggeri), calcolare

1. il numero medio di passeggeri che sale su di un autobus alla fermata
2. il numero medio di passeggeri sul primo autobus che parte dopo le nove di mattina di un giorno dato

Esercizio CMTC/06 - Dimostrare che il tempo di permanenza nello stato i di una catena di Markov a tempo continuo, W_i , è una variabile casuale con densità di probabilità

$$f_{W_i}(\tau) = -q_{ii} e^{q_{ii}\tau} u(\tau)$$

dove $-q_{ii}$ è la velocità di uscita dallo stato i . Mostrare inoltre che il tempo medio di ricorrenza dello stato i , M_i , vale

$$M_i = -\frac{1}{\pi_i q_{ii}}$$

Esercizio CMTC/07 - Si consideri un sistema markoviano di nascita e morte a tempo continuo nel quale il tasso di nascita decresce e il tasso di morte cresce al crescere del numero k di clienti nel sistema, tale cioè per cui

$$\lambda_k = \begin{cases} (K - k)\lambda & k < K \\ 0 & k \geq K \end{cases}$$

e

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & k \leq K \\ 0 & k > K \end{cases}$$

Si scrivano le equazioni differenziali per le probabilità degli stati dipendenti dal tempo, e si calcoli la distribuzione di regime.