PROBABILITÀ TOTALI
$P(B) = \sum_j P(B \cap A_j) = \sum_j P(A_J|B)P(B)$

V.A. DISCRETA
$x : \Omega \to \mathbb{R}$
sono discrete perché o x è un numero finito oppure un'infinità numerabile

V.A.BERNULLI $Be(p)$
$P(X = 1) = p \quad E(X) = p$
$P(X = 0) = q = 1 - p \quad V(X) = pq$

V.A. POISSON $Po(\theta)$(CONTARE QUANTE VOLTE AVVIENE UNA COSA)
$P(X = n) = e^{-\theta}\dfrac{e^n}{n}$
$E(X) = \theta \quad V(X) = \theta^2 \quad E(X^2) = \theta + \theta^2$
$\Phi_X(t) = exp\{-\theta(e^{it} - 1)\}$

V.A. BINOMIALE $Bi(n, p)$
$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}\}$
$A_k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega : \sum_{j=1}^{n} x_j = k\}$
$P(S_n = k) = P(A_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
$E(S_n) = np \quad E(S_n^2) = n(n-1)p^2 \quad V(S_n) = npq$
$\Phi_{S_n}(t) = (pe^{it} + q)^n$

TEMPO 1° SUCCESSO
se consideriamo tempo 1° successo n-esimo lancio
$P(T_1 = n) = pq^{n-1} \Rightarrow$legge Geometrica
$E(T_1) = \dfrac{1}{p}$ èuna legge xké dà 1 con la $\sum$ geom

PROCE. BERNULLI
sequenza finita di n v.a. indipe.
in cui ciascuna variabile
$P(X_j = 1) = p$
$P(X_j = 0) = q = 1 - p$
Es.(considera n lanci moneta T&C)
$S_n = \sum_{j=1}^{n} x_j \qquad P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

PROB k-ESIMO SUCC AL TEMPO n
$P(T_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k 1^{n-k}$

PROB CHE DEVO ASPETTARE AL MAX K LANCI T.C. T_1eT_2ABBAINO SUCCESSO AL TEMPO k
$P(T_1 \vee T_2 = k) = P(max\{T_1, T_2\} = k) = F(k) - F(k-1)$(LEGGE DEL MAX)
$P(T_1 \vee T_2) = P(T_1 \le k, T_2 \le k) \overset{per\ indip}{=} P(T_1 \le k)P(T_2 \le k) =$
$= (1 - q_1^k)(1 - q_2^k)$
impo $P(T_j \le k) = 1 - q_j^k$
$P(T_1 \vee T_2 = k) = q_1^{k-1}(1 - q_1) + q_2^{k-1}(1 - q_2) - (q_1q_2)^{k-1}(1 - q_1q_2)$

LEGGE IPERGEOMETRICA
$p_k = P(A_K) = \dfrac{\binom{b}{k}\binom{c}{n-k}}{\binom{b+c}{k}}$
b pal bianche c colorate n estratte, k siano bianche

SOMMA ALEATORIA
Data una successione X_n di v.a. i.i.d.
sup di avere N v.a.
posso esprimere
$S_N = \sum_{j=1}^{N} X_j \quad P(S_N = k) = \sum_{n=0}^{N} P(S_N = k|N = n)P(N = n)$
la variabile N assume valori indip da $X_n$perciò
S_N**indip** X_n

LEGGE CONGIUNTA DISCRETA
$P(X = x_j, Y = y_k) = P(\{X = X_j\} \bigcap \{Y = Y_K\}) = p_{jk}$
$\sum_j \sum_k p_{ij} = 1 \Rightarrow$se vogliamo sapere le marginali allora:
$\sum_k p_{jk} = P(\bigcup_k (\{X = x_j\} \bigcap \{Y = y_k\})) =$
$= P(\{X = x_j\} \bigcap \{\bigcup_k \{Y = y_k\}\}) = P(\{X = x_j\} \bigcap \Omega) =$
$= P(X = x_j) = p_j$
legge marginale di X

LEGGE GEOMETRICA
$P(T_1 = n) = pq^{n-1}$
$E(T_1) = \frac{1}{p}$
$\Phi_{T_1}(t) = \dfrac{pe^{it}}{1 - qe^{it}} = p\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}e^{itn} = pe^{it}\sum_{n=1}^{\infty}(qe^{it})^{n-1}$

PROB 1 SUCC DOPO K INSUCCESSI
$P(T_1 > k) = p\sum_{i=k+1}^{+\infty} q^{i-1} = q^k$

TEOREMA DI BAYES
$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \bigcap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_k P(B|A_k)P(A_k)}$$

FUNZIONE CARATTERISTICA
$\Phi_X(t) = E[e^{itx}]$
$\Phi_{X+Y}(t) = E[e^{it(X+Y)}] = \Phi_X\Phi_Y$(se sono indip)
$\Phi_X(t) = \int_{R^m} e^{it \cdot x} f(x)dx \qquad \Phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)dx$(densità continua)
$\sum_{x \in \mathbb{R}^m} e^{it \cdot x} p(x) \quad p(x)$legge di distribuzione(densità discreta)
$E(X) = \dfrac{\Phi'(0)}{i} \quad E(X^2) = \dfrac{\Phi''(0)}{i^2} \quad E(X^k) = \dfrac{\Phi^{(k)}(0)}{i^k}$

SPERANZA
$E(X^k) = \sum_i X_i^k p_i \quad P(X = x_i) = p_i$
$E(cX) = cE(X)$
$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \Leftrightarrow E(X) < +\infty, E(Y) < +\infty$

VARIANZA
$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
$V(X + a) = V(X)$
$V(aX) = a^2V(X)$
$V(\sum_{i=1}^{m} X_i) = \sum_{i=1}^{m} V(X_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \ne j}}^{m} COV(X_i, X_j)$se le variabili sono DIPENDENTI

COVARIANZA E COFF CORRELAZIONE
$COV(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$
$\rho(X_1, X_2) = \dfrac{COV(X_1, X_2)}{\sigma(X_1)\sigma(X_2)} = \dfrac{COV(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1)}\sqrt{V(X_2)}}$
$[COV(X, Y)]^2 = V(X)V(Y) \Rightarrow \rho^2_{X,Y} \le 1$
se le variabili sono incorrelate
$E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2) \Rightarrow COV(X_1, X_2)$=0

FORMULE:
$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x} \qquad \sum_{k=m}^{n} x^k = \dfrac{x^m - x^{n-1}}{1-x}$
$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k!} \qquad ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$
$\int_R e^{\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$

$P(T_k = s|T_j = n) = \binom{s-n-1}{k-j-1} P^{k-j} q^{s-n-(k-j)}$

$P(\{T_j = n\} \bigcap \{T_k = s\}) = \binom{n-1}{j-1}\binom{s-n-1}{k-j-1} p^k q^{s-k}$

$P(T_k = n) = P(S_{n-1} = k - 1)p$ p prob successo

A, B $indip$ $P(A|B) = P(A) \quad P(B|A) = P(B)$

$P(A \bigcap B) = P(A)P(B|A)$
$P(A \bigcup B \bigcup C) =$
$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \bigcap B) - P(A \bigcap C) - P(B \bigcap C) +$
$+P(A \bigcap B \bigcap C)$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$
$\int e^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax} \quad \int xe^{ax} = \frac{e^{ax}}{a}(x - \frac{1}{a}) \quad \int x^2e^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax}(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2})$
$\int x^n e^{cx} = \frac{1}{c}x^n e^{cx} - \frac{n}{c}\int x^{n-1}e^{cx}$

Int per parti
$\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)$

$\frac{d}{dx}(tanx) = \dfrac{1}{cos^2x} = 1 + tan^2x$

V.A. ASS CONTINUA

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$**densità**$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$

se X è una v.a. ass. cont. e f la sua densità

allora la sup f.r. è $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$

LEGGE NORMALE (GAUSSIANA)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$se ha densità

$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ con $x \in R$; $E(X) = \mu$;$V(X) = \sigma^2$

$E(X^2) = V(X)$; $\Phi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(\frac{t^2}{2})}dt$

$\varphi_X(t) = exp\{\mu it - \frac{\sigma^2\mu^2}{2}\}$

LEGGE UNIFORME

X ha legge uniforme se ha densità

$f(x) = \frac{1_{(a,b)}}{b-a}$; $E(X) = (a+b)/2$

$E(X^2) = \frac{b^2+a^2+ab}{3}$;$V(X) = (b-a)^2/12$

$F_x(x) = 0$ per x<a $F_x(x) = 1$ per x$\geq$b

$F_x(x) = \frac{x-a}{b-a}$ per $a \leq x < b$

$\Phi(t) = \frac{1}{b-a} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}$

LEGGE GAMMA

$\Gamma(r, \lambda) = f = \frac{\lambda^r e^{-\lambda x} x^{r-1}}{\Gamma(r)} 1_{R^+}(x)$; $E(X) = r/\lambda$;$V(X) = r/\lambda^2$

$\varphi(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-r}$

FUNZIONE GAMMA

$\Gamma(n) = (n-1)!$;$\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2}) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z)$;

$\Gamma(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$

LEGGE DI CAUCHY

X ha legge di $C(\alpha, \beta)$ se ha densità

$f(x) = \frac{1}{\pi\beta\left[\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1\right]}$ con $x \in R$; $E(X) = 0$ $\quad V(X) = not\exists$;

$\Phi_C(x) = e^{-|x|}$

LEGGE ESPONENZIALE

X ha legge esp. di par. λ se ha densità

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}1_{R^+}$;$E(X) = \lambda^{-1}$;$V(X) = \lambda^{-2}$

$F_x(x) = 1 - e^{-\lambda x}$; $E(X^2) = 2\lambda^{-1}\Phi(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-1} = \frac{\lambda}{\lambda+it}$

LEGGE χ^2

è la legge gamma $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2\sigma^2})$

LEGGE BETA

$f(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} 1_{(0,1)} = \frac{\Gamma(a+b)x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} 1_{(0,1)}$;

$\beta(\alpha, \beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{\beta-1}dx$;$E(X) = \frac{\alpha}{\beta+\alpha}$

$E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\beta+\alpha+1)(\alpha+\beta)}$;$V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\beta+\alpha+1)(\alpha+\beta)^2}$

Formule generali:

$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)dt$;$V(X) = \int_R (t - E(X))^2 f(t)dt$

FUNZIONE DI 2 V.A.

se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è densità di prob allora $\int_R dx_1 \int_R f(x_1, x_2) = 1$

$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{y} f(u, v)dv \quad F_i(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} dt_i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_i, t_j)dt_j$

densità f.r. marginali

$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, t_2)dt_2$

$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, x_2)dt_1$

VERIFICA INPENDENZA X,Y

$F(x, y) = F_1(x)F_2(y) \quad f(x, y) = f_1(x)f_2(x)$ o se il supp della densità non è prod carte

FUNZIONE DI RIP.

$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$

DENSITÀ DI LAPLACE

$f_Z(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t} & t > 0 \\ \frac{1}{2}e^{t} & t < 0 \end{cases}$

VARIANZA SPERANZA, COVARIANZA

$E(X) = \int_R t\varphi(t)dt$

$COV(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$

$E(X_1X_2) = \int_R dx_1 \int_R x_1x_2f(x_1, x_2)dx_2$

se sono incorrelate:

$E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2) \quad COV(X_1, X_2) = 0$

$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2COV(X, Y)$

OPERAZIONI V.A.

$X_i \sim \Gamma(r_i, \lambda) \to \sum_i^n X_i \sim \Gamma(\sum_i^n r_i, \lambda)$

$X_i \sim Poisson(\lambda_i) \to \sum_i^n X_i \sim P(\sum_i^n \lambda_i)$

$X_i \sim N(m_i, \sigma_i^2) \to \sum_i^n X \sim N(\sum_i^n m, \sum_i^n \sigma_i^2)$

$X_i \sim Bi(n_i, p) \to \sum_i^n X \sim Bi(\sum_i^n n, p)$

$X_i \sim Cauchy(\alpha_i, \beta_i) \to \sum_i^n X_i \simeq Cauchy(\sum_i^n \alpha_i, \sum_i^n \beta_i)$

$f_{X_1+X_2}(t) = \int_{\mathbf{R}} f_1(x)f_2(t-x)dx = \int_{\mathbf{R}} f_1(t-x)f_2(x)dx$

CATENE DI MARKOV

(1) **Catene senza stati transienti**
   (a) L'unica classe ergotica è regolare: tale catena si dice regolare **d=1**
   (b) l'unica classe ergotica è ciclica: tale catena di dice ciclica **d>1**
(2) **Catene con stati transienti:**
   (a) Tutte le classi ergotiche hanno un solo stato che è necessariamente assormente: tale catena si dice assorbente
   (b) tutte le classi ergotiche sono regolari ma almeno una di esse contiente pi di uno stato **d=1**
   (c) tutte le classi ergotiche sono cicliche **d>1** (anche non tutti uguali)
   (d) La catena ha classi ergotiche sia cicliche che regolari

se la densità è sul cerchio

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$; $\varphi(x, y) = \dfrac{1}{\pi r^2} 1_D(x, y)$

X, Y stessa legge $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi r^2} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy$

X, Y **NON** sono Indipendenti

$U = X^2 + Y^2 \quad F_U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ P(U \leq t) = \dfrac{\pi\sqrt{t^2}}{\pi r^2} = \dfrac{t}{r^2} & t \in [0, r^2[\\ 1 & t \geq r^2 \end{cases}$

$f_U(t) = \frac{1}{r^2} 1_{[0,r^2]}(t)$

$E(U) = \int_0^{r^2} \frac{u}{r^2} du = \frac{r^2}{2}$

$E(X) = E(Y) = 0 = COV(X, Y) \quad E(U) = E(X^2) + E(Y^2) = 2E(X^2)$

$V(X) = E(X^2) = \frac{r^2}{4}$

quando di fà la somma di 2 v.a. continue bisogna fare alla fine i vari casi dove è definita per esempio

$\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$

$X \sim \mathcal{U}(0, \alpha) \quad Y \sim \mathcal{U}(0, 1-\alpha)$ e la

$f_{X+Y}(x) = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}[x \bigwedge \alpha - (x - (1-\alpha)) \bigvee 0] \quad \bigwedge = min \quad \bigvee = max$

allora per $x \in]0, \alpha[$

$f_{X+Y}(x) = \dfrac{x}{\alpha(1-\alpha)}$

per $x \in]\alpha, 1-\alpha[$

$f_{X+Y}(x) = \dfrac{\alpha}{\alpha(1-\alpha)}$

per $x \in]1-\alpha, 1[$

$f_{X+Y}(x) = \dfrac{\alpha - (x - (1-\alpha))}{\alpha(1-\alpha)}$

Scegliere k da n (senza considerare l'ordine abc=bca)

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Scegliere k da n (Distribuzioni)(cons. l'ordine abc $\neg$bca)

$\frac{n!}{(n-k)!}$

Permutazioni semplici (anagrammi) = n!

Permutazioni con ripetizione$\frac{n!}{k_1!k_2!..k_r!}$Indicando con k1, k2 fino a kr il numero di volte che si ripetono rispettivamente gli elementi 1, 2 e r

Disposizioni con ripetizioni: n^k

Quando l'ordine non è importante ma è possibile avere componenti ripetute si parla di combinazioni con ripetizione$\binom{n+k-1}{k}$ (in quanti modi si possono distribuire k cose ad n persone)